第六章　计数原理

6.1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

1. D 【解析】根据分类加法计数原理，可得不同的选法共有 $6+4+2=12$(种). 故选 D.

2. C 【解析】显然 $300=2^2\times3\times5^2$，则 300 的正因数为 $2^\alpha\times3^\beta\times5^\gamma$，其中 $\alpha=0,1,2$，$\beta=0,1$，$\gamma=0,1,2$，
所以 300 的不同正因数有 $3\times2\times3=18$(个).

3. (1)9　(2)20　(3)4^9 【解析】(1)任取 1 封信，不论从哪个口袋中取，都能单独完成这件事，是分类问题，从第一个口袋中取 1 封信有 5 种取法，从第二个口袋中取 1 封信有 4 种取法，则共有 $5+4=9$(种)不同的取法.
(2)从两个口袋里各取 1 封信，不论从哪个口袋中取，都不能单独完成这件事，是分步问题，应分两个步骤完成：第一步，从第一个口袋中取 1 封信，有 5 种取法，第二步，从第二个口袋中取 1 封信，有 4 种取法，由分步乘法计数原理可知，共有 $5\times4=20$(种)不同的取法.
(3)第一封信投入邮筒有 4 种投法；第二封信投入邮筒有 4 种投法，…，第九封信投入邮筒有 4 种投法. 由分步乘法计数原理可知，共有 4^9 种不同的投法.

4. 1 296 【解析】由题图可知，从 A 点到 C 点最短路径有 6 种情况，从 C 点到 B 点最短路径有 6 种情况，所以甲、乙两人同时从 A 点到 B 点并且经过 C 点的最短路径有 $(6\times6)^2=1\ 296$(种)不同的走法.

5. C 【解析】由题意知可以按上、下两条路径分为两类，
上路径中有 1 条路径，下路径中有 $2\times3=6$(条)不同的路径.
根据分类加法计数原理，不同的路径

共有 $1+6=7$(条).

6. D 【解析】6 人任意报考三所院校的情况共有 $3^6=729$(种).

A 院校没人报的情况有 $2^6=64$(种),同理 B,C 院校没人报的情况各有 64 种.

A,B 院校都没人报、A,C 院校都没人报、B,C 院校都没人报各有 1 种情况(提示:两所院校都没人报的情况重复计数),所以不同的报考方法共有 $729-3\times64+3=540$(种).

7. B 【解析】因为 $A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\mid x_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,3,4,5\}$,

所以 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 都有 3 种不同的取值,则集合 A 中共有 $3\times3\times3\times3\times3=243$(个)元素,

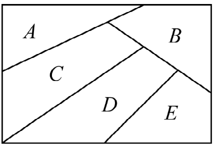
且 $0\leqslant x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\leqslant5$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\in\mathbf{Z}$.

其中满足 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=0$ 的情况只有 1 种,即 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$,

当 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=5$ 时,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 都有 2 种不同的取值,共有 $2\times2\times2\times2\times2=32$(种)不同的情况.

所以集合 A 中满足条件 $1\leqslant x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\leqslant4$ 的元素个数为 $243-1-32=210$. 故选 B.

8. 1 920 【解析】如图,设 5 个区域分别是 A,B,C,D,E.



第一步:选择 1 种花卉种植在 A 区域,有 6 种选择方法.

第二步:从剩下的 5 种花卉中选择 1 种种植在 B 区域,有 5 种选择方法.

第三步:从剩下的 4 种花卉中选择 1 种种植在 C 区域,有 4 种选择方法.

第四步:若区域 D 与区域 A 种植同种花卉,则区域 E 可选择的花卉有 4 种;若区域 D 与区域 A 种植不同种花卉,则区域 D 有 3 种选择方法,区域 E 有 4 种选择方法.

故不同的种植方法种数是 $6\times5\times4\times(1\times$

$4+3\times4)=1\ 920$.

9. 18 【解析】根据 $5+4-7=2$ 可知，有 2 名学生既会下象棋又会下围棋.

选参加象棋比赛的学生有两种选法：在只会下象棋的 3 人中选或在既会下象棋又会下围棋的 2 人中选；选参加围棋比赛的学生也有两种选法：在只会下围棋的 2 人中选或在既会下象棋又会下围棋的 2 人中选. 则可得四类不同的选法.

从 3 名只会下象棋的学生中选 1 名参加象棋比赛，同时从 2 名只会下围棋的学生中选 1 名参加围棋比赛，有 $3\times2=6$（种）选法；

从 3 名只会下象棋的学生中选 1 名参加象棋比赛，同时从 2 名既会下象棋又会下围棋的学生中选 1 名参加围棋比赛，有 $3\times2=6$（种）选法；

从 2 名只会下围棋的学生中选 1 名参加围棋比赛，同时从 2 名既会下象棋又会下围棋的学生中选 1 名参加象棋比赛，有 $2\times2=4$（种）选法；

2 名既会下象棋又会下围棋的学生分别参加象棋比赛和围棋比赛，有 2 种选法.

综上，共有 $6+6+4+2=18$（种）选法.

10. 25 758 【解析】先只考虑相邻字符不同的密码，共有 $9\times8^4=36\ 864$（种）.

这里面不满足要求的密码有两类：

第一类是仅包含单一字符类型（如全数字），这类共有 $3\times3\times2^4=144$（种）；

第二类是仅包含两种字符类型（如数字和小写字母），共有 6 个不同的字符可选，

只满足相邻字符不同的密码有 $6\times5^4=3\ 750$（种），其中只含有单一字符类型的有 $2\times3\times2^4=96$（种），

故第二类共有 $3\times(3\ 750-96)=10\ 962$（种）.

所以可以设置不同密码的总个数为 $36\ 864-144-10\ 962=25\ 758$.

6.2 排列与组合

6.2.1　排列+6.2.2　排列数

1. B　【解析】方法一：$\frac{2A_8^5+7A_8^4}{A_9^5-A_8^5}=\frac{2\times8\times7\times6\times5\times4+7\times8\times7\times6\times5}{9\times8\times7\times6\times5-8\times7\times6\times5\times4}=\frac{8\times7\times6\times5\times(8+7)}{8\times7\times6\times5\times(9-4)}=3.$

方法二：$\frac{2A_8^5+7A_8^4}{A_9^5-A_8^5}=\frac{2A_8^5+\frac{7}{4}A_8^5}{\frac{9}{4}A_8^5-A_8^5}=\frac{2+\frac{7}{4}}{\frac{9}{4}-1}=3.$

方法三：$\frac{2A_8^5+7A_8^4}{A_9^5-A_8^5}=\frac{\frac{2\times8!}{3!}+\frac{7\times8!}{4!}}{\frac{9!}{4!}-\frac{8!}{3!}}=\frac{8+7}{9-4}=3.$

故选 B.

2. C　【解析】由 $A_{n-1}^2-n<7$，得 $(n-1)(n-2)-n<7$，整理得 $n^2-4n-5<0$，解得 $-1<n<5$.

由题可知，$n-1\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $n=3$ 或 $n=4$，即原不等式的解集为 $\{3,4\}$.

故选 C.

3. B　【解析】方法一：分 2 步完成，即第一排从 10 位同学中，选取 5 位进行排列；第二排将剩下的 5 位进行排列，所以不同的排列种数有 $A_{10}^5A_5^5=10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=A_{10}^{10}$.

方法二：可以将两排的问题转化成 10 位同学排成一排，相当于 10 个人到 10 个位置就座，所以不同的排列种数有 A_{10}^{10}. 故选 B.

4. D　【解析】按两个班共选择活动项数分三类.

第一类：两个班共选择两项活动，有 A_6^2 种选法；

第二类：两个班共选择三项活动，有 $A_2^1A_6^3$ 种选法；

第三类：两个班共选择四项活动，有 A_6^4 种选法.

则活动安排方案的种数为 $A_6^2+A_2^1A_6^3+$

$A_6^4=630$.

故选 D.

5. $A_{n+1}^{n+1}-1$ 【解析】因为 $kA_k^k=(k+1)A_k^k-A_k^k=A_{k+1}^{k+1}-A_k^k$，所以 $A_1^1+2A_2^2+3A_3^3+\cdots+nA_n^n=A_2^2-A_1^1+A_3^3-A_2^2+\cdots+A_{n+1}^{n+1}-A_n^n=A_{n+1}^{n+1}-1$. 故原式 $=A_{n+1}^{n+1}-1$.

6. 3 【解析】因为 $A_5^x=2A_6^{x-1}$，所以 $\dfrac{5!}{(5-x)!}=2\cdot\dfrac{6!}{(7-x)!}$，且 $1\leqslant x\leqslant5$，$1\leqslant x-1\leqslant6$，$x\in\mathbf{N}^*$，即 $2\leqslant x\leqslant5$，$x\in\mathbf{N}^*$，化简得 $(7-x)(6-x)=12$，解得 $x=3$ 或 $x=10$（舍去），所以 $x=3$.

7. 136 080 【解析】方法一（位置分析法）：先排第 2 个节目，再排其他 5 个节目，则共有 $A_9^1A_9^5=136\ 080$（种）不同的排法.

方法二（元素分析法）：若选女演员的独唱节目，则有 $5A_9^5$ 种排法；若不选女演员的独唱节目，则有 A_9^6 种排法，则共有 $5A_9^5+A_9^6=136\ 080$（种）排法.

方法三（间接法）：总数减去女演员的独唱节目排在第 2 个的排法种数，则共有 $A_{10}^6-A_9^5=136\ 080$（种）排法.

8. D 【解析】依题意，7 名棋手进行全排列有 A_7^7 种，其中一班 5 名棋手的出场顺序已经排定，有 A_5^5 种，

所以不改变一班棋手出场顺序的不同排法种数为 $\dfrac{A_7^7}{A_5^5}=7\times6=42$.

9. C 【解析】第一步：捆绑 A,B,C，先排 A,B,C 3 辆车，共有 $A_3^3=3\times2\times1=6$（种）排法，

第二步：将另外 3 辆车捆绑，再排另外 3 辆车，共有 $A_3^3=3\times2\times1=6$（种）排法，

第三步：还剩 2 个空车位，把 2 个捆绑体插入 2 个空车位产生的 3 个空中共有 $A_3^2=3\times2=6$（种）排法，由分步乘法计数原理可知这 6 辆车符合条件的不同停放方法种数为 $6\times6\times6=216$. 故选 C.

10. D 【解析】先假设 CD 是实线，

则从 A 到 B，向上 3 次，向右 4 次，最短路径有 $\dfrac{A_7^7}{A_3^3A_4^4}=35$（条），

其中经过 CD 的，即先从 A 到 C，然后 C 到 D，最后 D 到 B 的最短路径有 $3\times3=9$(条)，

所以当 CD 不通时，最短路径有 $35-9=26$(条). 故选 D.

11. 240 【解析】把甲、乙"捆绑"看成一个元素，该元素与其余 4 人排列共有 $A_5^5=120$(种)不同的安排方式，

故甲、乙 2 名志愿者必须在相邻 2 个路口的安排方式的种数为 $A_2^2\times120=240$.

12. 210 【解析】方法一(空位插空法)：七个位置先安排 2,4,6 三个数，排法种数为 A_7^3，然后 1,3,5,7 的顺序按照要求只能是 1 种，由分步乘法计数原理得符合条件的七位数的个数为 $A_7^3\times1=210$.

方法二(逐步插空法)：先将 1,3,5,7 按固定顺序排好，这四个数有 5 个空隙，将 2 插入，有 5 个空隙可以选择，然后再将 4 插入，有 6 个空隙可以选择，最后将 6 插入，有 7 个空隙可以选择，所以由分步乘法计数原理得符合条件的七位数的个数为 $5\times6\times7=210$.

13. 30 【解析】若直线 $Ax+By+C=0$ 经过坐标原点，则 $C=0$，

那么 A,B 从剩余 6 个元素中任意取 2 个即可，有 $A_6^2=30$(条).

14. 【解】(1) 可分两步完成：第一步，先选 r，因为 $r>0$，所以有 A_8^1 种选法；第二步，再选 a,b，在剩余 8 个数中任取 2 个，有 A_8^2 种选法. 由分步乘法计数原理可知，可以作 $A_8^1A_8^2=448$(个)不同的圆.

(2) 若圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 经过原点，则 a,b,r 满足 $a^2+b^2=r^2$. 满足该条件的 a,b,r 有 3,4,5 与 6,8,10 两组，考虑 a,b 的顺序，每组各有 A_2^2 种情况，所以符合题意的圆有 $2A_2^2=4$(个).

(3) 若圆心在直线 $x+y-10=0$ 上，则 a,b 满足 $a+b=10$，则满足条件的 a,b 有三组：0,10；3,7；4,6.

当 a,b 取 0,10 时,r 有 A_7^1 种情况,

当 a,b 取 3,7 或 4,6 时,r 不可取 0,有 A_6^1 种情况.

考虑 a,b 的顺序,每组各有 A_2^2 种情况,所以满足题意的圆共有 $A_7^1A_2^2+2A_6^1A_2^2=38$(个).

15.【解】依题意,从 1 到 7 这 7 个数字中取 2 个偶数、3 个奇数,共有 $3\times4=12$(种)情况.

(1)共有 $12A_5^5=1\ 440$(个)五位数.

(2)把选出的偶数"捆绑"在一起,和奇数进行全排列,故其中偶数排在一起的有 $12A_2^2A_4^4=576$(个).

(3)把选出的偶数"捆绑"在一起,把选出的奇数也"捆绑"在一起,再全排列,故其中偶数排在一起,奇数也排在一起的有 $12A_2^2A_3^3A_2^2=288$(个).

(4)先排 3 个奇数,2 个偶数插空,故其中 2 个偶数不相邻的共有 $12A_3^3A_4^2=864$(个).

16. 252 【解析】易知$\{2,4,6,8,10,12\}$中的元素两两不互质,因此恰好在 6 个不同的集合中,

依次设为 $Y_2,Y_4,\cdots,Y_{12}$.

此时剩余的正整数中 1,7,11 可以任意放在上述 6 个集合中,5 不能放在 Y_{10} 中,3,9 不能放在 Y_6 或 Y_{12} 中,分 2 种情况:

①若 5 放入了 Y_6 或 Y_{12} 中,有 A_2^1 种情况,此时 3 与 9 可在 4 个集合中选择,有 A_4^2 种情况,而 1,7,11 放入剩下的集合中有 A_3^3 种情况.

②若 5 没有放入 Y_6 或 Y_{12} 中,则 5 有 3 个集合可以选择,有 A_3^1 种情况,进而 3 与 9 可在 3 个集合中选择,有 A_3^2 种情况,而 1,7,11 放入剩下的集合中有 A_3^3 种情况.

综上所述,不同的集合拆分方法共有 $A_2^1A_4^2A_3^3+A_3^1A_3^2A_3^3=252$(种).

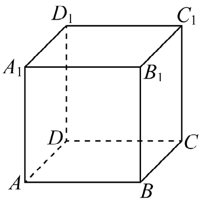
6.2.3 组合+6.2.4 组合数

1. A 【解析】$3C_8^6+A_6^2=3C_8^2+A_6^2=3\times\frac{8\times7}{2\times1}+6\times5=114$. 故选 A.

2. C 【解析】由组合数的性质可得
$\begin{cases}3n+6\leqslant 18,\\4n-2\leqslant 18,\end{cases}$ 解得 $n\leqslant 4$,
又 $C_{18}^{3n+6}=C_{18}^{4n-2}$,所以 $3n+6=4n-2$ 或 $3n+6+4n-2=18$,
解得 $n=8$(舍去)或 $n=2$,故 $A_n^2+C_{n+2}^2=A_2^2+C_4^2=2+6=8$. 故选 C.

3. A 【解析】携带工具方案有两类:
第一类,1 个钩子,1 个夹子,3 把铁锹,则不同的安排方案有 $C_5^3C_2^1=20$(种);
第二类,1 个钩子,2 个夹子,2 把铁锹,则不同的安排方案有 $C_5^2C_3^2=30$(种).
故不同的安排方案共有 50 种. 故选 A.

4. C 【解析】如图所示,



正方体由 6 个面构成,在这 6 个面内任取 3 个顶点都在同一个表面正方形内,共有 $6C_4^3=24$(种)选法. 在正方体的 8 个顶点中任选 3 个共有 $C_8^3=56$(种)选法.
所以在正方体的 8 个顶点中任选 3 个,这 3 个顶点恰好不在同一个表面正方形中的选法共有 $56-24=32$(种).

5. (1)46 (2)4 (3)462 (4)10(答案不唯一) 【解析】(1)由已知得
$\begin{cases}0\leqslant 10-n\leqslant 2n+3,\\0\leqslant 3n\leqslant n+7,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{7}{3}\leqslant n\leqslant \dfrac{7}{2}$,
又 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 $n=3$,
所以 $C_{2n+3}^{10-n}+C_{n+7}^{3n}=C_9^7+C_{10}^9=36+10=46$.
(2)因为 $xC_x^{x-1}+A_x^3=4C_{x+1}^3$,所以 $x\cdot x+x\cdot(x-1)(x-2)=4\times\dfrac{(x+1)x(x-1)}{3\times 2\times 1}$,
$x\geqslant 3$,化为 $x^3-6x^2+8x=0$,解得 $x=4$.
(3)由 $\dfrac{1}{C_5^m}-\dfrac{1}{C_6^m}=\dfrac{7}{10C_7^m}$ 可得 $\dfrac{m!(5-m)!}{5!}-\dfrac{m!(6-m)!}{6!}=\dfrac{7\times m!\times(7-m)!}{10\times 7!}$,
即 $\dfrac{m!(5-m)!}{5!}-\dfrac{m!\times(6-m)\times(5-m)!}{6\times 5!}=$

$\frac{7\times m!\times(7-m)(6-m)(5-m)!}{10\times7\times6\times5!}$,

化简得 $1-\frac{6-m}{6}=\frac{(7-m)(6-m)}{10\times6}$,整理得 $m^2-23m+42=0$,

解得 $m=2$ 或 $m=21$,

因为 $0\leqslant m\leqslant5$,所以 $m=2$,

所以 $C_7^2+C_7^3+C_8^4+C_9^5+C_{10}^6=C_8^3+C_8^4+C_9^5+C_{10}^6=C_9^4+C_9^5+C_{10}^6=C_{10}^5+C_{10}^6=C_{11}^6=C_{11}^5=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}=462.$

(4)不等式 $C_6^4<C_n^2\leqslant C_{10}^2$ 可化为 $15<\frac{n(n-1)}{2}\leqslant45$,整理得 $\begin{cases}n^2-n-30>0,\\n^2-n-90\leqslant0,\end{cases}$ 而 $n\geqslant2$,解得 $6<n\leqslant10$,又 $n\in\mathbf{N}^*$,因此 $n\in\{7,8,9,10\}$,所以 n 的一个取值可能是 10(答案不唯一).

6. 36 【解析】按取出的白球、红球个数逐一分析:

①白球取 1 个,红球取 3 个,

白球编号为奇数,红球编号要 2 个偶数 1 个奇数,共有 $C_2^1\cdot C_2^1=4$(种)可能;编号为奇数和偶数个数相同,故白球编号为偶数时,也有 4 种可能,所以共有 8 种可能.

②白球取 2 个,红球取 2 个,

若白球编号都为奇或偶,则红球编号也都为奇或偶,共有 $C_2^1\cdot C_2^1=4$(种)可能;

若白球编号 1 奇 1 偶,则红球编号也要 1 奇 1 偶,共有 $C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1=16$(种)可能.

③由于对称性,白球取 3 个,红球取 1 个的情况等同于白球取 1 个,红球取 3 个的情况,所以共有 8 种可能.

综上,共有 $8\times2+4+16=36$(种)可能.

7. 3 【解析】由题可知,$C_5^2C_x^1=30$,

即$\frac{5\times4}{2}x=30$,解得 $x=3$.

8. C 【解析】由于甲、乙都不是最差的,且乙的名次比甲差,所以甲、乙均在前 4 名中,且甲在乙的前面,故从前 4 名中选择两个名次安排甲、乙的名次,共有 C_4^2 种方法,接下来将剩下 3 人全排列,共有 A_3^3 种方法,故满足条件的情

况数为 $C_4^2A_3^3=36$. 故选 C.

9. D 【解析】第一步，将四位学生分成三组，即随机选取两人为一组，其余剩下两人每人单独一组，故有 C_4^2 种分法；第二步，将三组学生排列到三门课程中，共有 A_3^3 种排列方法，

所以不同的报名方法有 $C_4^2A_3^3=36$(种). 故选 D.

10. C 【解析】第一步，先分组，分为一组 2 人，另一组 4 人，有 $C_2^1C_4^1=8$(种)分组方法；

分为每组各 3 人，有 $\dfrac{C_2^1C_4^2}{A_2^2}=6$(种)分组方法.

分组方法共有 $8+6=14$(种).

第二步，将两组志愿者分配到两个服务站共有 $A_2^2=2$(种)分法.

所以不同的分配方案有 $14\times2=28$(种).

11. B 【解析】若有两个岗位各有 2 名学生报考，一个岗位有 1 名学生报考，则有 $\dfrac{C_5^2\cdot C_3^2\cdot C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3$ 种报考方法. 若有两个岗位各有 1 名学生报考，一个岗位有 3 名学生报考，则有 $\dfrac{C_5^3\cdot C_2^1\cdot C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3$ 种报考方法.

所以共有 $\dfrac{C_5^2\cdot C_3^2\cdot C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3+\dfrac{C_5^3\cdot C_2^1\cdot C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=150$(种)报考方法.

12. 20 【解析】将 7 个三好学生名额排成一排，从 6 个空中插入 3 个隔板，将名额分成 4 组，故分配方案共有 $C_6^3=20$(种).

13. 190 【解析】若求方程 $x+y+z=18$ 的非负整数解有多少组，即求方程 $X+Y+Z=21(X=x+1,Y=y+1,Z=z+1)$ 的正整数解有多少组，即在 21 个位置产生的 20 个空里插入 2 个隔板，所以有 $C_{20}^2=190$(组).

14. 165 【解析】先给每人分 2 本书，然

后将剩下的 12 本书用隔板法分给 4 名学生，12 本书之间有 11 个空隙，插入 3 个隔板，共有 $C_{11}^{3}=165$（种）分法.

所以每名学生至少得 3 本书，共有 165 种不同的分法.

15.【解】从这 12 名翻译人员中选 6 人，其中 3 人翻译英语，3 人翻译法语，可以分为下面 4 种情况.

①只会英语的 3 人都去翻译英语，有 $C_3^3\cdot C_9^3=84$（种）选法；

②从只会英语的 3 人中选 2 人去翻译英语，从既能翻译英语，也能翻译法语的人中选取 1 人去翻译英语，有 $C_3^2\cdot C_5^1\cdot C_8^3=840$（种）选法；

③从只会英语的 3 人中选 1 人去翻译英语，从既能翻译英语，也能翻译法语的人中选 2 人去翻译英语，有 $C_3^1\cdot C_5^2\cdot C_7^3=1\ 050$（种）选法；

④只会英语的 3 人中没有人去翻译英语，从既能翻译英语，也能翻译法语的人中选取 3 人去翻译英语，有 $C_3^0\cdot C_5^3\cdot C_6^3=200$（种）选法.

综上，共有 $84+840+1\ 050+200=2\ 174$（种）不同的选法.

16.【解】由题意知小组赛中共有 $3\times C_4^2=18$（场）比赛，

淘汰赛第一轮（8 强赛）共有 4 场比赛，

淘汰赛第二轮（4 强赛）共有 2 场比赛，冠亚军有 1 场比赛，三四名有 1 场比赛，

所以一共有 $18+4+2+1+1=26$（场）比赛.

17. D 【解析】由题意可知，千位和十位上的数字奇偶性相同.

当千位和十位上的数字都为奇数时，满足条件的五位数有 $C_5^2C_6^1C_6^1=360$（个）；

当千位和十位上的数字均为偶数且不含 0 时，满足条件的五位数有 $C_4^2C_6^1C_6^1=216$（个）；

当千位为 0，十位为 2，4，6，8 时，满足

条件的五位数有 $C_4^1A_7^2=168$(个).

综上,满足条件的五位数共有 $360+216+168=744$(个). 故选 D.

6.3 二项式定理

6.3.1 二项式定理+
6.3.2 二项式系数的性质

1. C 【解析】$(x-1)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_{10}^r x^{10-r}\cdot(-1)^r$,

故第 4 项 $T_4=C_{10}^3x^{10-3}(-1)^3=-C_{10}^3x^7$,

故选 C.

2. A 【解析】$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^4=C_4^0x^4\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^0+C_4^1x^3\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^1+C_4^2x^2\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2+C_4^3x^1\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^3+C_4^4x^0\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^4=x^4-4x^2+6-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}$.

3. B 【解析】借助二项式定理可得 $\dfrac{C_{10}^0}{2^0}-\dfrac{C_{10}^1}{2^1}+\dfrac{C_{10}^2}{2^2}-\cdots+\dfrac{C_{10}^{10}}{2^{10}}=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{10}=\dfrac{1}{2^{10}}=\dfrac{1}{1\ 024}$.

4. C 【解析】第 2 项、第 3 项、第 4 项的二项式系数成等差数列,即 C_n^1,C_n^2,C_n^3 构成等差数列,

所以 $2C_n^2=C_n^1+C_n^3$,即 $2\times\dfrac{n(n-1)}{2\times1}=n+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$,且 $n\in\mathbf{N}^*$,$n\geqslant3$,

可得 $n^2-9n+14=0$,解得 $n=7$ 或 $n=2$(舍去).

5. D 【解析】$\left(x^2+\dfrac{1}{3x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot(x^2)^{6-r}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^r\cdot x^{-r}=C_6^r\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^r\cdot x^{12-3r}$,

令 $12-3r=0$,解得 $r=4$,所以常数项为 $C_6^4\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=15\times\dfrac{1}{81}=\dfrac{5}{27}$. 故选 D.

6. D 【解析】$\left(\dfrac{a}{x}+\sqrt{x}\right)^5$ 的展开式的通

项为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^{5-r}\cdot(\sqrt{x})^r=C_5^r\cdot a^{5-r}\cdot x^{\frac{3r}{2}-5}$，$r=0,1,\cdots,5$，由 $\frac{3r}{2}-5=1$，解得 $r=4$，所以 $T_5=C_5^4\cdot ax=5ax$.

由 $5a=20$，得 $a=4$. 故选 D.

7. D 【解析】方法一：$\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^6$ 的展开式中含 x^3 的项为 $C_6^3\cdot x^3\cdot C_3^3\cdot 2^3+C_6^4\cdot x^4\cdot C_2^1\cdot\frac{1}{x}\cdot C_1^1\cdot 2=160x^3+60x^3=220x^3$ $\Big($提示：$C_6^3\cdot x^3\cdot C_3^3\cdot 2^3$ 表示 6 个 $\left(x+\frac{1}{x}+2\right)$ 中有 3 个取 x，有 3 个取 2；$C_6^4\cdot x^4\cdot C_2^1\cdot\frac{1}{x}\cdot C_1^1\cdot 2$ 表示 6 个 $\left(x+\frac{1}{x}+2\right)$ 中有 4 个取 x，1 个取 $\frac{1}{x}$，1 个取 2. 其他情况不可能存在 $x^3\Big)$. 故选 D.

方法二：$\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^6=\left(\frac{x^2+2x+1}{x}\right)^6=\frac{(x+1)^{12}}{x^6}$，$(x+1)^{12}$ 的展开式的通项为 $C_{12}^k x^{12-k}$，令 $k=3$，得 x^9 的系数为 $C_{12}^3=220$，所以 $\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为 220. 故选 D.

8. D 【解析】$\because\left(x+\frac{m}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)^5=\left(x+\frac{m}{x}\right)\cdot(C_5^0\cdot x^5-C_5^1\cdot x^3+C_5^2\cdot x-C_5^3\cdot x^{-1}+C_5^4\cdot x^{-3}-C_5^5\cdot x^{-5})$，

$\therefore$ 它的展开式中常数项是 $-C_5^3+m\cdot C_5^2=10$，$\therefore m=2$. 故选 D.

9. A 【解析】由 $x^4+(x+1)^7=a_0+a_1\cdot(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_7(x+2)^7=[(x+2)-2]^4+[(x+2)-1]^7$，得 $a_3=C_4^1(-2)+C_7^4(-1)^4=-8+35=27$. 故选 A.

10. A 【解析】方法一：因为 $(xy+y-2x-2)^6$ 表示六个因式 $(xy+y-2x-2)$ 的乘积，展开式中要得到含 x^3y^5 的项，需有两个因式取 xy，一个因式取 $-2x$，剩下的三个因式取 y 或有三个因式取

xy,两个因式取 y,剩下的一个因式取-2,所以展开式中 x^3y^5 的系数为 $C_6^2\cdot C_4^1\cdot(-2)\cdot C_3^3+C_6^3\cdot C_3^2\cdot C_1^1\cdot(-2)=-120-120=-240$. 故选 A.

方法二:$(xy+y-2x-2)^6=[y(x+1)-2(x+1)]^6=(x+1)^6(y-2)^6$,$(x+1)^6$ 的展开式的通项为 $C_6^r x^{6-r}$,$(y-2)^6$ 的展开式的通项为 $C_6^k y^{6-k}(-2)^k$,

令 $r=3$ 且 $k=1$,则 x^3y^5 的系数为 $C_6^3\cdot C_6^1\cdot(-2)^1=-240$. 故选 A.

11. A 【解析】原式$=(1+0.998)^5-1=(2-0.002)^5-1=C_5^0 2^5-C_5^1 2^4\times0.002+C_5^2 2^3\times0.002^2-\cdots-C_5^5\times0.002^5-1\approx32-0.16-1=30.84$. 故选 A.

12. A 【解析】因为 $55^{55}=(56-1)^{55}=C_{55}^0\times56^{55}-C_{55}^1\times56^{54}+C_{55}^2\times56^{53}-C_{55}^3\times56^{52}+\cdots+C_{55}^{54}\times56-C_{55}^{55}$,

显然,除了最后一项-1外,其余的各项都能被 7 整除,所以 55^{55} 除以 7 的余数为 6. 又今天是星期四,所以经过 55^{55} 天后是星期三,故选 A.

13. 【证明】$\because\ 11^{10}-1=(10+1)^{10}-1$

$=(10^{10}+C_{10}^1\cdot10^9+C_{10}^2\cdot10^8+\cdots+C_{10}^9\cdot10+1)-1$

$=10^{10}+C_{10}^1\cdot10^9+C_{10}^2\cdot10^8+\cdots+10^2$

$=100(10^8+C_{10}^1\cdot10^7+C_{10}^2\cdot10^6+\cdots+1)$,

$\therefore\ 11^{10}-1$ 能被 100 整除.

14. D 【解析】由题意可得 $x=C_{2n}^n$,$y=C_{2n+1}^{n+2}$ 或 C_{2n+1}^{n+1},且 $C_{2n+1}^{n+2}=C_{2n+1}^{n+1}$,

故 $11C_{2n}^n=6C_{2n+1}^{n+1}$,即 $11\times\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}=6\times\dfrac{(2n+1)!}{n!\cdot(n+1)!}$,即 $11=6\times\dfrac{2n+1}{n+1}$,解得 $n=5$.

15. CD 【解析】因为 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中第 4 项与第 9 项的二项式系数相等,所以 $C_n^3=C_n^8$,所以 $n=11$,由于展开式中项的系数与二项式系数相等,故展开式中系数最大的项为第 6 项和第 7 项. 故选 CD.

16. C 【解析】由二项式定理易知选项 A

错误;令 $x=0$,得 $a_0=1$,令 $x=\frac{1}{2}$,得 $0=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2\,022}}{2^{2\,022}}$,$\therefore\ \frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2\,022}}{2^{2\,022}}=-1$,故选项 B 错误;令 $x=1$,得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2\,022}=1$ ①,令 $x=-1$,得 $a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{2\,022}=3^{2\,022}$②,由①+②得 $2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2\,022})=3^{2\,022}+1$,$\therefore\ a_2+a_4+\cdots+a_{2\,022}=\frac{3^{2\,022}-1}{2}$,故选项 C 正确;$\because\ (1+2x)^{2\,022}$ 的展开式的各项系数之和减去 a_0 就相当于 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{2\,022}|$,$\therefore\ |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{2\,022}|=3^{2\,022}-a_0=3^{2\,022}-1$,故选项 D 错误. 故选 C.

17. ACD 【解析】令 $x=1$,得 $a_0=2$,故 A 正确;

$x^6+x^{12}=[(x-1)+1]^6+[(x-1)+1]^{12}$,

因为 $[(x-1)+1]^{12}$ 的展开式的通项 $T_{k+1}=C_{12}^k\cdot(x-1)^{12-k}$,令 $12-k=12$,得 $k=0$,则 $T_1=C_{12}^0(x-1)^{12}=(x-1)^{12}$,所以 $a_{12}=1$,故 B 错误;

令 $12-k=10$,得 $k=2$,则 $T_3=C_{12}^2(x-1)^{10}=66(x-1)^{10}$,从而 $a_{10}=66$,故 D 正确;

令 $x=0$,得 $a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{12}=0$,因为 $a_0=2$,

所以 $a_1-a_2+a_3-\cdots+a_{11}-a_{12}=2$,故 C 正确.

故选 ACD.

18. B 【解析】因为 $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中有且仅有第五项的二项式系数最大,所以 $\frac{n}{2}+1=5$,解得 $n=8$,则 $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式的通项 $T_{k+1}=C_8^k\cdot(2x^2)^{8-k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^k=C_8^k\cdot2^{8-k}\cdot(-1)^k\cdot x^{16-3k}(k=0,1,2,3,4,5,6,7,8)$.

因为当 k 为奇数时,系数为负数;当 k 为偶数时,系数为正数,所以展开式中系数最大时,k 为偶数,由展开式的

通项可知 $T_1=C_8^0 2^8 x^{16}=256x^{16}$，$T_3=C_8^2 2^6 x^{10}=1\ 792x^{10}$，$T_5=C_8^4 2^4 x^4=1\ 120x^4$，$T_7=C_8^6 2^2 x^{-2}=112x^{-2}$，$T_9=C_8^8 2^0 x^{-8}=x^{-8}$，所以展开式中系数最大的是第三项. 故选 B.

19. 12 【解析】由题可知 $(1+2x)^6$ 的展开式的二项式系数为 $C_6^k(k=0,1,\cdots,6)$，当 $k=3$ 时，取得最大值 $a=C_6^3=20$. $(1+2x)^6$ 的展开式的系数为 $C_6^k 2^k$ $(k=0,1,\cdots,6)$，当满足 $\begin{cases}C_6^k 2^k\geqslant C_6^{k+1}2^{k+1},\\ C_6^k 2^k\geqslant C_6^{k-1}2^{k-1}\end{cases}$ 时，系数最大，即

$$\begin{cases}\dfrac{6!}{k!\cdot(6-k)!}2^k\geqslant\dfrac{6!}{(k+1)!\cdot[6-(k+1)]!}2^{k+1},\\ \dfrac{6!}{k!\cdot(6-k)!}2^k\geqslant\dfrac{6!}{(k-1)!\cdot[6-(k-1)]!}2^{k-1},\end{cases}$$

$\begin{cases}\dfrac{1}{6-k}\geqslant\dfrac{2}{k+1},\\ \dfrac{2}{k}\geqslant\dfrac{1}{7-k},\end{cases}$ $\begin{cases}k+1\geqslant 2(6-k),\\ 2(7-k)\geqslant k,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{11}{3}\leqslant k\leqslant\dfrac{14}{3}$. 又 $k=0,1,\cdots,6$，所以当 $k=4$ 时，系数的最大值 $b=C_6^4 2^4=240$.

故 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{240}{20}=12$.

20. 【证明】(1) 由二项式定理可得 $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n=C_n^0\left(\dfrac{2}{n}\right)^0+C_n^1\left(\dfrac{2}{n}\right)^1+C_n^2\left(\dfrac{2}{n}\right)^2+\cdots+C_n^n\left(\dfrac{2}{n}\right)^n$，

若 $n\geqslant2$，则有 $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n=1+n\cdot\dfrac{2}{n}+\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n=3+\dfrac{2(n-1)}{n}+\cdots+\left(\dfrac{2}{n}\right)^n\geqslant3+\dfrac{2(n-1)}{n}=3+2\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\geqslant3+2\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=4$，则 $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n\geqslant4(n\geqslant2)$ 成立.

(2) 由二项式定理得 $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n=C_n^0\left(\dfrac{2}{n}\right)^0+C_n^1\left(\dfrac{2}{n}\right)^1+C_n^2\left(\dfrac{2}{n}\right)^2+\cdots+C_n^n\left(\dfrac{2}{n}\right)^n$，

若 $n\geqslant2$，则有 $C_n^2\geqslant1$，则 $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n=$

$1+n\cdot\frac{2}{n}+C_n^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{n}\right)^n=3+C_n^2\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{n}\right)^n\geqslant3+\left(\frac{2}{n}\right)^2$,

则$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\geqslant3+\left(\frac{2}{n}\right)^2$（$n\geqslant2$）成立.

21. B 【解析】由 $a_3=330$，得 $C_5^1\times C_4^1\times3\times(-m)^3+C_5^3\times3^3\times(-m)^2=330$，

所以 $2m^3-9m^2+11=(m+1)(2m^2-11m+11)=0$，解得 $m=-1$ 或 $m=\frac{11+\sqrt{33}}{4}$或 $m=\frac{11-\sqrt{33}}{4}$，

因为 $m\in\mathbf{Z}$，所以 $m=-1$，

故$\left(mx+\frac{2\ 014}{x}\right)^{2\ 014}=\left(-x+\frac{2\ 014}{x}\right)^{2\ 014}$，

令 $x=1$，则有 $(-1+2\ 014)^{2\ 014}=2\ 013^{2\ 014}$，

即展开式中所有项的系数和为 $2\ 013^{2\ 014}$. 故选 B.